



Forblad

Brudbetingelser for sten og beton

K.W. Johansen

Tidsskrifter

BSM 29-1 Bygningsstatistiske Meddelelser

1958

BRUDBETINGELSER FOR STEN OG BETON

Af K. W. JOHANSEN¹

DK 624.046:691.21:691.32

I det følgende skal der gøres et forsøg på at give en oversigt over vor nuværende viden om sten og betons brud ved sammensatte påvirkninger, altså for en vilkårlig rumlig spændingstilstand. Vi vil, som det er sædvanligt for disse materialer, regne trykspændinger positive.

Det vil være nyttigt først at gennemgå de forskellige

BRUDHYPOTESER

Erfaringen viser, at brud foregår langs visse snitflader og efter de geometriske forhold kan inddeles i adskillelsesbrud og glidningsbrud, efter som bevægelsen fjerner brudfladerne fra hinanden eller ej.

Det ligger nu nær at antage, at bruddet i et snit er bestemt alene ved størrelse og retning af spændingen \bar{p} på dette snit, eller hvad der kommer ud på det samme, ved en relation mellem snittets normalspænding σ og forskydningsspænding τ , f. eks. på formen

$$f(\sigma, \tau) = K \quad (1)$$

Når $f(\sigma, \tau) < K$ fås ikke brud. Afbildes (1) i et koordinatsystem med σ som abscisse og τ som ordinat, deler kurven planen i to dele, svarende til $f(\sigma, \tau) < K$ og $f(\sigma, \tau) > K$. Den del, der indeholder begyndelsespunktet (0,0) svarer til den første ulighed, da spændingerne nul ikke kan give brud. Den dobbelt skraverede del svarer derfor til brud.

Som bekendt kan den rumlige spændingstilstand for et punkt fremstilles ved MOHR'S cirkler, idet koordinaterne til punkterne i det enkelt-skraverede område bestemmer samtlige sammenhørende værdier af σ og τ . En sådan rumlig spændingstilstand vil derfor netop medføre

¹ Professor, dr. techn., Danmarks tekniske Højskole.

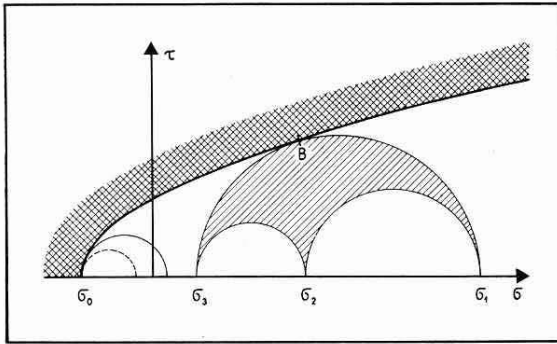


Fig. 1. Mohrs grænsekurve.
● Mohr's envelope.

brud, når den største cirkel netop tangerer grænsekurven (1). Dette viser nu straks, at bruddet kun bestemmes af største og mindste hovedspænding, σ_1 og σ_3 , medens den mellemste, σ_2 , er uden indflydelse, idet den største cirkel alene er bestemt ved σ_1 og σ_3 . Brudsnittet er endvidere bestemt ved røringepunktet B . Da dette ligger på den største cirkel, går brudsnittet gennem 2. hovedakse.

Det er mere bekvemt at give brudbetingelsen (1) en anden form. Det fremgår af figuren, at radius i cirklen er $\tau_m = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$ og abscissen til centret er $\sigma_m = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)$, altså den største forskydningsspænding og den tilhørende normalspænding i den rumlige spændingstilstand. Af kurven (1) udledes nu en kurve

$$F(\sigma_m, \tau_m) = K \quad (2)$$

ved at dreje dens normal, τ_m , om sit fodpunkt, σ_m , så den bliver ordinat. Dette kan udtrykkes analytisk ved formlerne

$$\sigma_m = \sigma + \tau \frac{d\tau}{d\sigma} \quad \tau_m = \tau \sqrt{1 + \left(\frac{d\tau}{d\sigma}\right)^2} \quad (3)$$

Kurven (2) har åbenbart samme karakter som (1).

Eks. 1. Friktionshypotesen

$$\tau = c + \mu\sigma \quad (a)$$

svarer til en ret linie for (1). Ved (3) eller direkte geometriske betragtninger fås heraf den rette linie

$$\tau_m \sqrt{1 + \mu^2} = c + \mu\sigma_m. \quad (A)$$

EKS. 2. Parablen

$$\tau^2 = b^2 \left(1 + \frac{\sigma}{a} \right) \quad (b)$$

giver ved (3) eller geometrisk, når man husker, at parablens subnormal er konstant lig $b^2:2a$

$$\tau_m = b^2 \left(1 + \frac{\sigma}{a} - \frac{b^2}{4a} \right) \quad (B)$$

altså samme parabel forskudt $b^2:4a$.

EKS. 3. Endelig giver hyperblen

$$\left(\frac{\sigma + c}{a} \right)^2 - \left(\frac{\tau}{b} \right)^2 = 1 \quad (c)$$

ved (3)

$$\frac{(\sigma_m + c)^2}{a^2 + b^2} - \left(\frac{\tau_m}{b} \right)^2 = 1 \quad (C)$$

altså en hyperbel med samme centrum og lille halvakse b . Det ses af disse eksempler, at for de simple kurver, man kunne tænke sig at benytte for (1), får man lige så simple kurver for (2).

Da $\sigma_m = 1/2 (\sigma_1 + \sigma_3)$ og $\tau_m = 1/2 (\sigma_1 - \sigma_3)$ kan brudbetingelsen (1) også skrives på formen

$$F(\sigma_1, \sigma_3) = K \quad (2a)$$

hvor funktionen F naturligvis ikke er den samme som i (2).

Den til (2a) svarende kurve fås simpelthen ved at dreje den til (2) svarende 45° og gange den med $\sqrt{2}$. Vi har nemlig

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sqrt{2} \left(\sigma_m \sqrt{\frac{1}{2}} + \tau_m \sqrt{\frac{1}{2}} \right) \\ \sigma_3 &= \sqrt{2} \left(\sigma_m \sqrt{\frac{1}{2}} - \tau_m \sqrt{\frac{1}{2}} \right). \end{aligned}$$

Af flere grunde vil vi foretrække at benytte formen (2) i det følgende.

Som bekendt benævnes (1) MOHR'S brudhypotese, der altså er ganske ensgyldig med (2) og (2a).

Da fortegnet for τ ikke har nogen fysisk betydning, må kurverne (1) og (2) være symmetriske om abscisseaksen.

Skærer kurven denne akse vinkelret, fremkommer følgende særlige forhold: Når den berørende cirkel rykker mod venstre, vil dens røringss-

punkt B nærme sig absцisseaksen og falde i denne, når cirklen falder sammen med krumningscirklen i kurvens toppunkt. Denne cirkel er fuldt optrukket i fig. 1. Inde i krumningscirklen kan imidlertid tegnes andre cirkler (punkteret i fig. 1), som også rører i toppunktet, men for disse gælder åbenbart

$$\sigma_3 = \sigma_m - \tau_m = \sigma_0 < 0 \quad (4)$$

hvilket netop er brudbetingelsen for adskillelsesbrud, der således er indbefattet i MOHRs hypotese, som ellers gælder for glidningsbrud.

Den ved (4) fremstillede kurve er en ret linie i fremstillingerne (2) og (2a). I første tilfælde afskærer den σ_0 på akserne og danner 45° med disse. Det vises let geometrisk, at kurven (2) tangerer linien (4). I andet tilfælde fås en linie parallel med σ_3 -aksen i afstanden σ_0 . Denne linie tangerer kurven (2a). I eksemplerne 2 og 3 ovenfor skal toppunkterne af kurverne ikke benyttes, men på det sidste stykke den til (4) svarende tangent, der går gennem punktet $(\sigma_0, 0)$.

Af formen (2a) ser man straks, at MOHRs hypotese ikke er den helt almindelige, idet denne må have formen

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = K. \quad (5)$$

(Strengt taget kunne man også tænke sig spændingsgradienterne indgående, hvorved spændingsforløbet og legemets størrelse også får indflydelse på bruddet, hvad visse forsøg viser virkeligt er tilfældet. Dette vil vi dog se bort fra her).

Da bruddet ikke sker langs linieelementer, er det mindre sandsynligt, at deformationerne ε , som svarer til linieelementer, skulle være de afgørende størrelser. Da deformationerne i reglen er bestemte ved spændingerne, fører en betingelse af formen

$$\varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = K$$

iøvrigt straks til formen (5).

I (5) forudsættes, at $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. I fysisk henseende gør det nemlig i høj grad forskel, om en hovedspænding er den største, den mindste eller den mellemste. En speciel form af (5) fås, hvis funktionen er symmetrisk, så de tre variable kan ombyttes uden at den ændres, altså

$$\left. \begin{aligned} K &= F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = F(\sigma_1, \sigma_3, \sigma_2) = F(\sigma_2, \sigma_1, \sigma_3) \\ &= F(\sigma_2, \sigma_3, \sigma_1) = F(\sigma_3, \sigma_1, \sigma_2) = F(\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Ifølge en af algebraens nyttige sætninger, kan funktionen da også udtrykkes ved de tre spændingsinvarianter

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3; \quad I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3; \quad I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \quad (7)$$

altså

$$G(I_1, I_2, I_3) = K. \quad (6a)$$

Denne er altså ækvivalent med (6) og derfor et meget specielt tilfælde af (5).

I ren formel matematisk henseende er der ikke forskel på de tre hovedspændinger. Ønsker man derfor, at σ_1 , σ_2 og σ_3 kan betegne hvilken som helst af hovedspændingerne, må (5) suppleres med de tilsvarende, hvor σ_1 , σ_2 og σ_3 er ombyttet på alle tænkelige måder, hvorved vi netop får de seks ligninger (6). Disse kan samles i een ved at skrive dem på formen $F - K = 0$ og multiplicere dem sammen. Dette produkt af 6 faktorer er symmetrisk i σ_1 , σ_2 og σ_3 og kan følgende skrives på formen

$$H(I_1, I_2, I_3) = K \quad (5a)$$

der er ækvivalent med den helt almindelige betingelse (5).

Vi har set det paradoksale resultat, at en brudbetingelse udtrykt ved spændingsinvarianter kun repræsenterer den helt almindelige (5), hvis funktionen har den meget specielle form (5a), der kan opløses i 6 faktorer af formen $F - K$.

EKS. 4. Den simple brudbetingelse for adskillelsesbrud $\sigma_3 - \sigma_0 = 0$ ønskes på symmetrisk form. Den suppleres med $\sigma_2 - \sigma_0 = 0$ og $\sigma_1 - \sigma_0 = 0$ og vi finder da

$$(\sigma_1 - \sigma_0)(\sigma_2 - \sigma_0)(\sigma_3 - \sigma_0) = I_3 - \sigma_0 I_2 + \sigma_0^2 I_1 - \sigma_0^3 = 0$$

EKS. 5. Den simple friktionshypotese i eks. 1 giver

$$\sigma_1 (\sqrt{1 + \mu^2} - \mu) = 2c + \sigma_3 (\mu + \sqrt{1 + \mu^2})$$

eller

$$\sigma_1 - \lambda \sigma_3 - k = 0.$$

Den kan gøres symmetrisk ved at supplere med

$$\sigma_3 - \lambda \sigma_1 - k = 0, \quad \sigma_2 - \lambda \sigma_1 - k = 0 \quad \text{o. s. v.,}$$

hvoraf man ved multiplikation finder

$$(\sigma_1 - \lambda\sigma_3 - k) (\sigma_3 - \lambda\sigma_1 - k) (\sigma_2 - \lambda\sigma_1 - k) (\sigma_1 - \lambda\sigma_2 - k) \\ (\sigma_2 - \lambda\sigma_3 - k) (\sigma_3 - \lambda\sigma_2 - k) = 0$$

Ved en række kedelige regninger kunne dette udtrykkes ved invarianterne. Det er åbenbart, at udtrykket bliver meget kompliceret og derfor ganske uden interesse.

Af eksemplerne ses tydeligt, at simple udtryk af formen (5) fører til indviklede udtryk af formen (5a), som derfor ikke bør benyttes.

Det næste skridt bliver nu på grundlag af forsøg at fastlægge funktionen i (5). Det er imidlertid meget vanskeligt at bestemme en funktion af tre variable ud fra givne sæt af disse, idet det svarer til at bestemme en flade gennem givne punkter i rummet. Hertil kommer, at det foreliggende forsøgsmateriale er meget sparsomt. Man må derfor indtil videre forenkles formen (5), så man kun får en funktion med to variable. Derved reduceres opgaven til at lægge en kurve gennem givne punkter og kommer i det hele taget til at passe bedre til forsøgsmulighederne.

Nu viser forsøgene, at den mellemste hovedspænding σ_2 i reglen kun har en beskednen indflydelse og i mange tilfælde slet ingen, så en nærliggende forenkling af (5) er at anvende (2a) eller de tilsvarende. Dette er det grænsetilfælde, hvor den mellemste hovedspænding σ_2 ingen indflydelse har. Det andet grænsetilfælde, hvor σ_2 har den størst tænkelige indflydelse repræsenteres af (6a), idet σ_2 på fuldkommen demokratisk vis indgår i udtrykket på nøjagtig samme måde som σ_1 og σ_3 , altså er på lige fod med disse. En større indflydelse af σ_2 kan man ikke godt tænke sig. Nu er (6a) stadig en funktion med tre variable, så vi må søge den forenklet. Som bekendt har de to spændingsinvarianter I_1 og I_2 simple fysiske betydninger ved elastisk materiale, idet deformationsarbejdet kan udtrykkes ved disse alene, så det ligger nær at udelade I_3 , selv om den muligvis kan have en vis betydning ved andre materialer. I stedet for selve invarianterne benyttes nu bedre to af disse afledede størrelser

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{okt} &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{1}{3} I_1; \\ \tau_{okt} &= \frac{\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}}{3} = \frac{\sqrt{2(I_1^2 - 3I_2)}}{3} \end{aligned} \right\} (7a)$$

Dette er de såkaldte oktaederspændinger, normal- og forskydnings-spænding i de 8 snit, hvis normaler danner lige store vinkler med de tre hovedakser, så deres retningscosinusser er $\pm 1:\sqrt{3}$.

Vi får derfor ved forenkling af (6a) SCHLEICHERS hypotese [17]

$$F(\sigma_{okt}, \tau_{okt}) = K \quad (8)$$

som udtryk for grænsetilfældet med størst indflydelse af den mellemste hovedspænding. Hypotesen er oprindeligt opstillet som flydebetingelse.

Man må nu regne, at den virkelige brudbetingelse må ligge mellem de to grænsetilfælde, altså mellem MOHR'S og SCHLEICHERS hypoteser og formentlig nærmest den første.

Vi skal derfor blot på een eller anden måde interpolere mellem f. eks. (2) og (8). Dette kan naturligvis gøres på mange måder, men den mest nærliggende fås, når vi bemærker, at i (2) indgår spændingerne i snittet med enhedsnormalen $\bar{n} = \{1, 0, 1\}:\sqrt{2}$ og i (8) spændingerne med enhedsnormalen $\bar{n} = \{1, 1, 1\}:\sqrt{3}$. Vi kan da tage en funktion af spændingerne med enhedsnormalen $\bar{n} = \{1, \alpha, 1\}:\sqrt{2 + \alpha^2}$, hvor α ligger mellem 0 og 1. Disse spændinger er ifølge de kendte udtryk for spændingstensoren

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \alpha^2 \sigma_2 + \sigma_3}{2 + \alpha^2}; \tau_\alpha = \frac{\sqrt{\alpha^2(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + \alpha^2(\sigma_2 - \sigma_3)^2}}{2 + \alpha^2} \quad (9)$$

og vi har derfor brudhypotesen

$$F(\sigma_\alpha, \tau_\alpha) = K \quad (10)$$

med rimelige tilpasningsmuligheder.

Der gøres udtrykkelig opmærksom på, at den er af rent formel karakter, idet der i snittet med σ_α og τ_α ikke foregår noget særligt.

Man vil i reglen regne størrelsen α for en konstant, men det er naturligtvis muligt, at den kan variere med spændingerne.

Udtrykket kan gøres simple, idet man med god tilnærmelse kan erstatte τ_α med τ_m , hvorved man får:

$$F(\sigma_m + \frac{1}{2} \alpha^2 \sigma_2, \tau_m) = K. \quad (10a)$$

Når $\sigma_2 = 0$, får vi af (10a) netop kurven (2) svarende til MOHR'S hypotese. Vi kan derfor benytte samme kurve, når blot abscissen er

$\sigma_m + \frac{1}{2} \alpha^2 \sigma_2$. Benyttes derimod stadig abscissen σ_m , da α jo ikke er bekendt på forhånd, forskydes kurven $\frac{1}{2} \alpha^2 \sigma_2$ i abscisseaksens negative retning.

Det må ikke glemmes, at (10) og (10a) skal suppleres med (4), betingelsen for adskillelsesbrud.

Eks. 6. Et lineært udtryk giver ved en let omskrivning

$$(1 - n)\sigma_1 = n\alpha^2\sigma_2 + (n + 1)\sigma_3 + K$$

der for $\alpha = 1$ giver SANDELS brudhypotese [18]

$$n(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + K = \sigma_1 - \sigma_3, \quad n < 1.$$

Da værdien 1 af α er ret usandsynlig, gælder dette også hypotesen. For $n = (1 - \nu) : (1 + \nu)$ og den umulige værdi $\alpha^2 = -2\nu : (1 - \nu)$ fås SAINT-VESENTS hypotese.

BRUDFORSØG

A. METODER

Når man nu ved hjælp af forsøg vil prøve at få nærmere rede på brudbetingelserne, må man nødvendigvis kunne frembringe to- eller treaksede spændingstilstande, der er statisk bestemte, da HOOKES lov i reglen ikke gælder op til brud. Dette indskrænker mulighederne betydeligt, så der i det væsentlige kun bliver to. Den første er et alsidigt vædsketryk i forbindelse med simpelt tryk eller træk. Dette giver en treakset spændingstilstand, hvor to af hovedspændingerne er lige store. Prøvelegemerne er cirkulære cylindre, der anbringes i et trykkammer d (fig. 2), hvor høje vædsketryk kan frembringes. I reglen er trykkene så høje, at de ikke kan tages direkte fra pumpen. Pumpetrykket føres ind i a , hvor det virker på det store stempel b , hvis skaft er stempel i rummet c , der ved boringen e er i forbindelse med d . I c og d fås altså et tryk, der er pumpetrykket multipliceret med forholdet mellem stemplets og skaftets areal. Det aksiale tryk fås fra en almindelig prøvemaskine gennem skaftet f . Ved de svære pakninger, hvorigennem skafterne føres ind i trykkammeret, optræder en betydelig friktion, som man derfor må bestemme og korrigere for.

Man anbringer da en stålcylander på prøvelegemets plads. Ved at måle stålcylanderens forkortelse kan den nøjagtige kraft, og dermed friktionen bestemmes ved forskellige tryk. Den er meget nær propor-

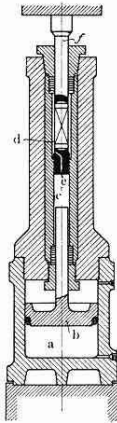


Fig. 2. Trykkammer (gen-givet efter [1]). ● Compression compartment (reproduced from [1]).

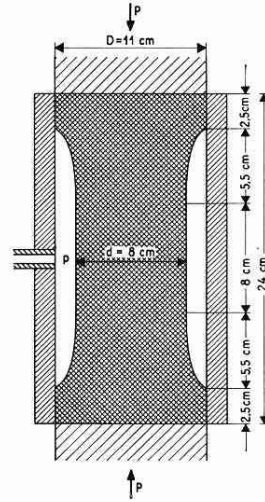


Fig. 3. Brices forsøgsanordning. ● Brice's experimental arrangement.

fional med trykket i *a*. Denne metode er anvendt ved forsøgene i [1], [2], [4], [6], [7], [10].

Man kan undgå pakningerne og dermed friktionen ved at benytte fint tilslebne stænger, der gennem lange borer indføres i trykkammeret. Når stængerne passer meget nøjagtigt i boringen, siver der ikke mere vædske ud end, at man kan holde trykket. Ved denne metode kan man dog ikke komme så højt op med trykket, som ved den første. Denne metode er anvendt ved forsøgene i [3].

For at vædsken ikke skal trænge ind i prøvelegemet og give anledning til lokale sprængninger, beklædes prøven med tynd metalfolie eller en gummihinde. Forinden afrettes prøvens overflade omhyggeligt med shellak, da ujævnheder kan give brud i det beskyttende overtræk.

Disse treaksede trykforsøg kan deles i to typer. Ved den første er aksialspændingen den største, så de to ligestore hovedspændinger er de mindste. Ved den anden er omvendt vædsketrykket større end aksialspændingen. De fleste forsøg er af type 1, med een stor hovedspænding og to mindre. Af type 2, med to store hovedspændinger og een mindre, foreligger meget få forsøg, åbenbart fordi de er vanskeligere at udføre. Dette skyldes dels det større vædsketryk, dels at man på sikker måde skal forhindre vædsketrykket i at trænge ind mellem skaft og prøvestykke.

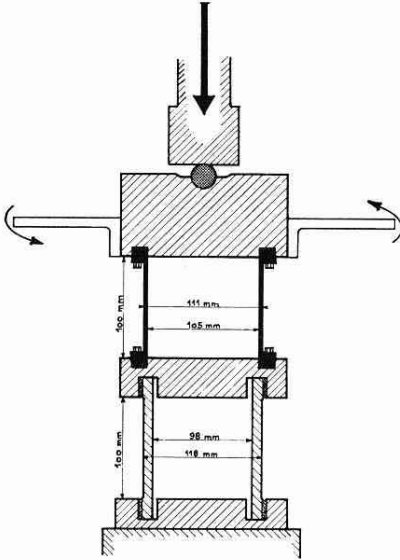


Fig. 4. Opstilling til kombinerede tryk-vridningsforsøg (gengivet efter [9]). Det aksiale tryk overføres gennem stålkuglen øverst, og vridningsmomentet gennem to arme på den tykke plade. Under den følger et tyndvægget stålør, hvormed belastningen måles. Nederst ses det rørformede prøvelegeme. • Arrangement for combined compression-torsion tests (reproduced from [9]). The torque is transmitted through two arms on the heavy plate. Below, a steel tube to measure the applied loads. At the bottom the tubular test specimen.

Ønskes forsøg med aksiale trækspændinger, kan man benytte selve prøvelegemet som stempel i en stålcylder, som vist i fig. 3. Prøvelegemet beskyttes ved en gummihinde, der tillige danner pakning ved cylindervæggen. Trykkraften P fås ved at anbringe det hele i en prøvemaskine. Ved forskellige manipulationer elimineres friktionen.

Er vædsketrykket p og trykkraften P fås

$$\sigma = \frac{4P}{\pi d^2} - p \left(\frac{D^2}{d^2} - 1 \right)$$

i længderetningen. Spændingen kan blive negativ for passende små værdier af P . Denne metode kan kun anvendes for meget beskedne vædsketryk, 400 kg/cm² og eliminationen af friktionen er næppe fuldkommen [8], [9].

Ved den førstnævnte metode er det også forsøgt at påvirke prøvelegemet til vridning samtidig med påvirkningen af aksialtrykket og vædsketrykket. Derved kan man få tre forskellige hovedspændinger, hvoraf den ene endog kan være en trækspænding. Desværre lykkedes det ikke at få resultater frem, der kunne bringes i forbindelse med de tilsvarende forsøg uden vridning [2].

En særlig klar og tilsyneladende simpel metode til afgørelse af gyldigheden af MOHR'S hypotese er bestemmelsen af styrken for simpelt tryk

og for toakset tryk. Ifølge MOHRs hypotese skulle disse to styrker være ens, da $\sigma_1 = \sigma_c$ og $\sigma_3 = 0$ er de samme i begge tilfælde. Det simple trykforsøg er det specielle tilfælde af type 1, hvor vædsketrykket er nul. Det toaksede trykforsøg er det specielle tilfælde af type 2, hvor aksialtrykket er nul. Der er foreslået flere simple metoder til udførelse af toakset tryk [9], [14], [15]. Som regel trykkes en tærning mellem to sæt stempler lige stærkt i to på hinanden vinkelrette retninger. Vanskeligheden ligger i at formindske indflydelsen af friktionen mellem stemplerne og prøvelegemet.

Muligheden for brudbetingelser af formen (10) eller (10a) ses ved sammenligning mellem treaksede forsøg af type 1 og type 2. I disse er den mellemste hovedspænding σ_2 henholdsvis lig med σ_3 og σ_1 , så i σ_m, τ_m -diagrammet er kurverne forskudte henholdsvis $\frac{1}{2} \alpha^2 \sigma_3$ og $\frac{1}{2} \alpha^2 \sigma_1$. Da $\sigma_1 > \sigma_3$ kommer derved kurven svarende til type 1 til at ligge under den, der svarer til type 2. Er det omvendte tilfældet, eller skærer kurverne hinanden, kan (10) eller (10a) ikke anvendes.

Den anden forsøgsmulighed giver statisk bestemte to-aksede spændingstilstande. Man benytter her som prøvelegeme et tyndvægget, cirkulært rør, der trykkes aksialt, medens det samtidig påvirkes af et indre vædsketryk eller vrides om sin akse. I begge tilfælde fås i rørvæggen en spændingstilstand, hvor den mellemste hovedspænding er nul og de to andre har modsat fortegn. Disse forsøg kan derfor aldrig bruges til at undersøge gyldigheden af MOHRs hypotese.

Ved forsøgene med vædsketryk bliver aksialspændingen og ringspændingen netop hovedspændingerne og beregnes let på kendt vis. Der er ingen vanskeligheder ved målingen af kraften eller vædsketrykket.

Ved forsøgene med vridning beregnes aksialspændingen σ fra trykket og forskydningsspændingen τ fra vridningen også let ved kendte formler. Af σ og τ findes f. eks. ved MOHRs cirkel straks hovedspændingerne

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_1 \\ \sigma_3 \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \sigma \pm \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}.$$

De har som nævnt ovenfor altid modsat fortegn. Kraften og det vridende moment kan måles ved »strain gages« på et tyndvægget stålrør, se fig. 4, der sættes i forlængelse af betonrøret og derfor får nøjagtig samme påvirkninger som prøvelegemet.

Ved disse forsøg er der således ingen usikkerhed i kraftmålingen. Derimod kan det være vanskeligt at sikre sig mod mikrorevner i det rørformede prøvelegeme, når det støbes med kærne. Denne vil under

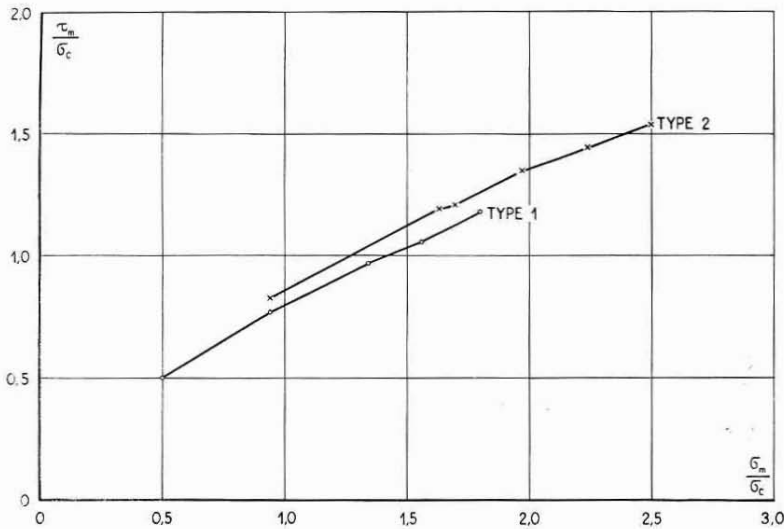


Fig. 5. v. Kármán og Bökers resultater for marmor i $\sigma_m/\sigma_c - \tau_m/\sigma_c$ koordinater.
 • v. Kármán's and Böker's results from marble, rendered in $\sigma_m/\sigma_c - \tau_m/\sigma_c$ coordinates.

afbindingen forhindre sammentrækningen i ringretningen og kan der- ved bevirke visse svækkelser.

Forsøg af denne art med vridning anvendes i [9], [12], [13] og med indvendigt vædsketryk i [11].

B. RESULTATER

Marmor.

Treksede trykforsøg af type 1 udførtes allerede 1912 af v. KÁRMÁN med marmor og sandsten [1], og 1915 udførte BÖKER tilsvarende forsøg af type 2 med samme marmor [2]. I fig. 5 er de to forsøgsrækker afbildet i det dimensionsløse system $\sigma_m:\sigma_c, \tau_m:\sigma_c$, hvor σ_c er trykstyrken. I fig. 6 er de samme forsøg afbildet i fremstillingen $\sigma_\alpha:\sigma_c$ og $\tau_\alpha:\sigma_c$ ved formlerne (9) med $\alpha = 0,4$. Man ser, at forsøgsresultaterne nu ligger nær een og samme kurve. I figuren er indtegnet den semi-kubiske parabel

$$y = 0,80 (x + 0,05)^{2/3},$$

men man kan praktisk taget ligeså godt bruge en hyperbel som i eks. 3.

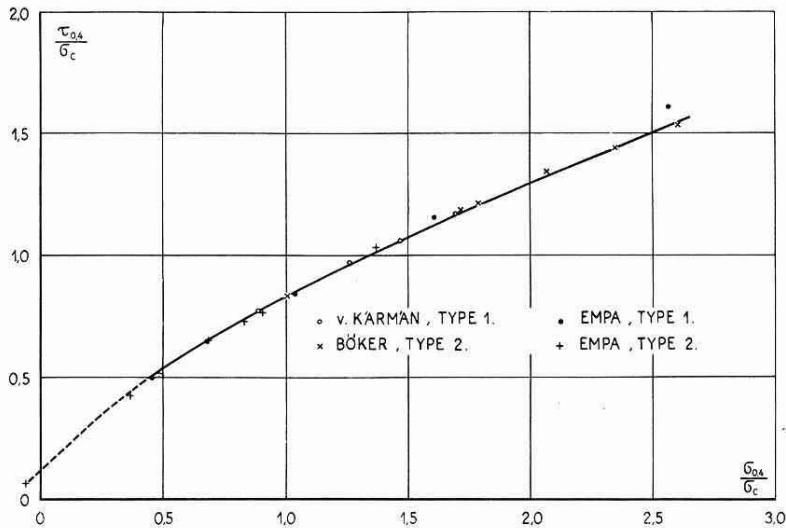


Fig. 6. Resultater for marmor i $\sigma_\alpha/\sigma_c - \tau_\alpha/\sigma_c$ koordinater. ● Results from marble, rendered in $\sigma_\alpha/\sigma_c - \tau_\alpha/\sigma_c$ coordinates.

Ingen af kurverne kan forlænges bagud, idet de skærer for tæt ved nulpunktet, hyperblen endda på den gale side. Derimod kan man beregne styrken σ_{cc} ved toakset tryk, idet $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_{cc}$ og $\sigma_3 = 0$ giver

$$\sigma_\alpha = \frac{1 + \alpha^2}{2 + \alpha^2} \sigma_{cc} = 0,54 \sigma_c \quad \text{og} \quad \tau_\alpha = \frac{\sqrt{\sigma_{cc}^2 + \alpha^2 \sigma_{cc}^2}}{2 + \alpha^2} = \frac{\sqrt{1 + \alpha^2}}{2 + \alpha^2} \sigma_{cc}$$

altså $\tau_\alpha : \sigma_\alpha = y : x = 1 : \sqrt{1 + \alpha^2} = 1 : \sqrt{1,16} = 0,93$. Man får da af ovenstående ligning $x = 0,72$ og dermed $\sigma_{cc} : \sigma_c = x : 0,54 = 4 : 3$.

I 1928 gentog EMPA forsøgene i et trykkammer uden pakninger [3]. Resultaterne bekræfter ganske de foregående. Således fandtes $\alpha = 0,4$ og de i fig. 6 angivne resultater. Man fik her også to punkter af kurvens forlængelse mod begyndelsespunktet. Her må vi også tage (4) i betragtning. Med $\sigma_3 = -\sigma_0$ og $\sigma_1 = \sigma_2$ fås $\sigma_\alpha = (\sigma_1 + \alpha^2 \sigma_1 - \sigma_0) : (2 + \alpha^2)$ og $\tau_\alpha = \sqrt{1 + \alpha^2} (\sigma_1 + \sigma_0) : (2 + \alpha^2)$, der ved elimination af σ_1 giver den rette linie $\sigma_\alpha = \sqrt{1 + \alpha^2} \tau_\alpha - \sigma_0$. Gennem det punkt, der svarer til det rene trækforsøg trækkes da en linie med hældningen $1 : \sqrt{1 + \alpha^2} = 0,93$. Denne benyttes indtil den tangerer kurven. Der mangler dog forsøgsresultater her. Det er dog ikke uden interesse at undersøge om

den rette linie tangerer f. eks. den ovenfor angivne semikubiske parabel. Da trækstyrken $\sigma_0 = 127 \text{ kg/cm}^2$ og $\sigma_e = 934 \text{ kg/cm}^2$ bliver liniens ligning

$$x = \frac{y}{0,93} - 0,14.$$

For kurven er

$$y' = \frac{2}{3} 0,8 (x + 0,05)^{-1/3} = 0,93,$$

der giver

$$x = 0,14 \text{ og } y = 0,8 \cdot 0,19^{2/3} = 0,26.$$

Disse værdier opfylder liniens ligning.

Det foreliggende forsøgsmateriale synes således at bekræfte brugbarheden af (10) indenfor det område, der dækkes af forsøgene. Der kan hertil føjes, at BRANDTZÆG i 1927 [5] videreførte visse teoretiske betragtninger af BÖKER (1915) [2] til en brudteori for et krystallinsk materiale. Dette forudsættes opbygget af anisotrope elementer, der imidlertid er vilkårligt orienteret, så materialet stort set kan betragtes som isotropt. Elementerne forudsættes at have en svageste plan, hvor glidning indtræffer efter friktionshypotesen (eks. 1). Ved en vis påvirkning vil der alt efter orienteringen indtræffe glidning i nogle af elementerne, men da de støttes af de elementer, hvor der ikke er glidning, fås ikke brud i materialet som helhed. Derimod opstår visse indre spændinger mellem elementerne, og BRANDTZÆG forudsætter nu, at det egentlige brud indtræffer, når største trækspænding overskrider en vis kritisk værdi.

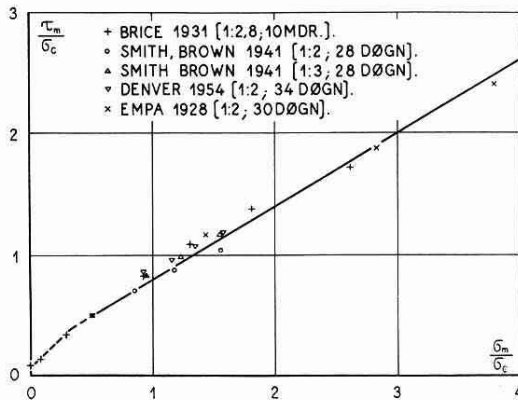
Resultatet af beregningerne kan kun gives implicit, og for treaksede tryk af type 1 og 2 har BRANDTZÆG fundet kurver af lignende form og beliggenhed som i fig. 6. De er dog beregnet for værdier gældende for beton, men dette ændrer næppe det rent principielle forløb. Da beton ikke er et krystallinsk materiale, kan BRANDTZÆGS teori ikke anvendes på dette.

Medens man ved marmor kan benytte små prøver på få cm i diameter, kræver forsøg med beton betydeligt større prøvelegemer, og derfor også større trykkamre ved de treaksede tryk.

Cementmørtel.

Ved EMPA forsøgene [3] anvendtes derfor prøvelegemer af ren cement eller cementmørtel. Forsøgene af type 1 og 2 gav kurver, der lå meget nær hinanden, men i modsætning til forsøgene med marmor lå

Fig. 7. Resultater for cementmørtel. Forsøg af type 1 og 2. ● Results from cement mortar. Experiments of type 1 and 2.



kurven svarende til type 2 lidt under den, der svarer til type 1. Man kan derfor med god tilnærmelse regne med een kurve, d. v. s. MOHR'S teori er gyldig. Resultaterne er afsat i fig. 7 sammen med de nyere forsøg [7], [9], [10].

Fælles for alle forsøgene er det til simpelt tryk svarende punkt (0,5; 0,5). Punkterne til venstre herfor svarer til type 2 med den mindste hovedspænding lig træk, medens punkterne til højre for (0,5; 0,5) svarer til type 1. Da en kurve gennem de førstnævnte punkter synes at fortsætte gennem de tilsvarende punkter på højre side, d. v. s. forsøgene af type 1 og type 2 synes at give samme kurve, fås også herved en vis bekræftelse af MOHR'S hypotese. De samme forsøgsresultater (punkterne +) er også afsat i fig. 9, hvis øvrige punkter svarer til forsøg, hvor mellemste hovedspænding er nul. Det ses, at de slutter sig ganske til de øvrige, igen en bekræftelse af MOHR'S hypotese.

I fig. 7 er gennem punktet (0,5; 0,5) indlagt en ret linie med hældning 0,6, der nær begyndelsespunktet går over i en anden med hældning 1. Forsøgsresultaterne slutter sig på tilfredsstillende måde til disse to rette linier, som vi vil gense i det følgende.

Beton.

I 1928 udførte RICHART, BRANDTZÆG og BROWN treaksede trykforsøg med beton [4]. Forsøgene af type 2 viste sig at være meget vanskelige, og forfatterne angiver selv, at de er meget usikre. Resultaterne var, at kurven for type 2 lå klart under kurven for type 1. Der blev samtidig udført særlige forsøg til bestemmelse af forholdet mellem styrken σ_{cc} ved toakset tryk og trykstyrken σ_c , og σ_{cc} fandtes tydeligt større end σ_c ,

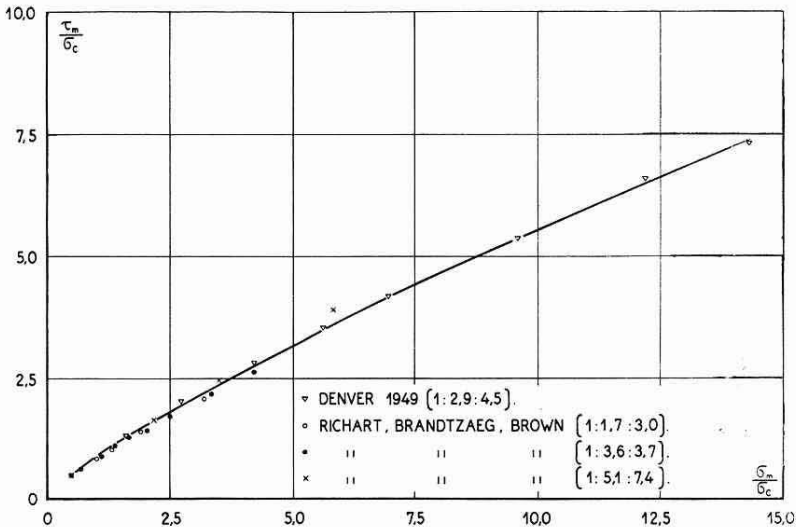


Fig. 8. Resultater for beton. Forsøg af type 1. ● Results from concrete. Experiments of type 1.

hvilket svarer til, at kurven for type 2 her ligger over den for type 1, så de to kurver må skære hinanden, et lidt usandsynligt forløb. Senere forsøg med toakset tryk [9], [14], [15] viser det samme, men ingen af dem er helt pålidelige, så forøgelsen kan alene skyldes den omstændighed, at der benyttes terninger, hvor de skrå brudflader ikke frit kan udvikle sig. Ved de forsøg, hvor der ikke benyttedes terninger [9], [15] var der mulighed for en vis friktion, som bevirker forøget styrke. Indtil dette spørgsmål er nærmere opklaret, er det derfor sikrest foreløbig at blive ved MØHR'S hypotese.

I 1949 blev der i Denver, Colorado, U.S.A., udført omfattende forsøg af type 1 med beton, hvor man kom op på meget høje tryk [6]. Resultaterne er gengivet i fig. 8 sammen med de tilsvarende forsøg [4] af RICHART-BRANDTZÆG-BROWN. Den indtegnede kurve har ligningen

$$y = 0,88 x^{0,8}.$$

En hyperbel kan også indlægges, men passer knapt så godt her. Af praktiske grunde er et simpelt udtryk ønskeligt, og indskrænker man sig til det første stykke af kurven f. eks. indtil $\sigma_m = 5,5 \sigma_c$ kan man med god tilnærmelse og på den sikre side regne med en ret linie, der får hældningen 0,6, d. v. s. den samme som i fig. 7. Dens ligning bliver

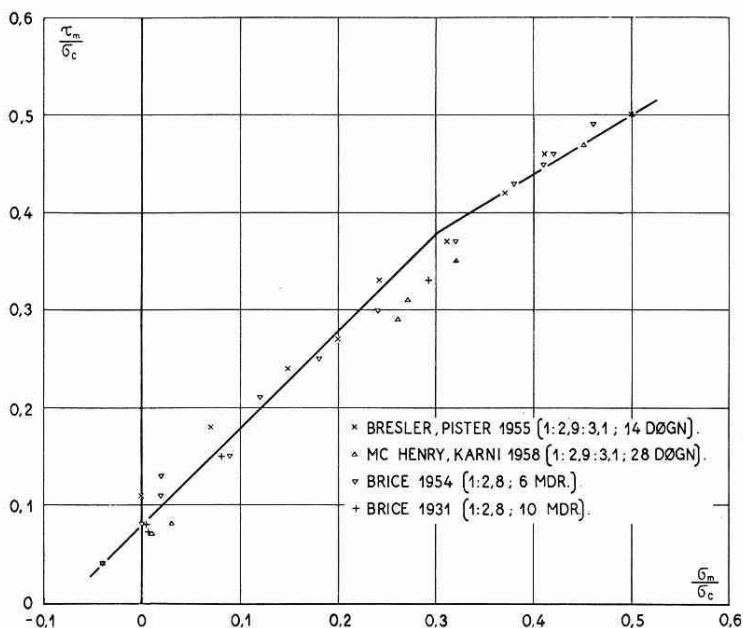


Fig. 9. Resultater for beton. ● Results from concrete.

$$\frac{\tau_m}{\sigma_c} - 0,5 = 0,6 \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_c} - 0,5 \right) \quad \sigma_m \leq 5,5 \sigma_c$$

eller udtrykt ved hovedspændingerne

$$\sigma_1 = \sigma_c + 4\sigma_3. \quad \sigma_3 \leq 2\sigma_c$$

Ved forsøg med beviklede søjler fandt RICHART-BRANDTZÆG-BROWN [16] en tilsvarende ligning, dog med talkoefficienten 4,1. Denne lidt højere værdi skyldes, at forsøgsintervallet var betydeligt mindre end svarende til grænserne ovenfor, idet største σ_3 kun var 0,75 σ_c .

Forsøgene med hovedspændinger af modsat fortegn [11], [12] er sammen med de tidligere nævnte forsøg med cementmørtel afsatte i fig. 9, hvor øverste punkt svarer til simpelt tryk og nederste til simpelt træk. Gennem det sidste trækkes den til adskillelsesbruddet svarende rette linie med hældning 1, svarende til (4) og gennem det første linien med hældning 0,6. Det ses, at forsøgsresultaterne ligger ret nær disse to linier. Det ses, at trækstyrken er

$$-\sigma_0 = 0,08 \sigma_c.$$

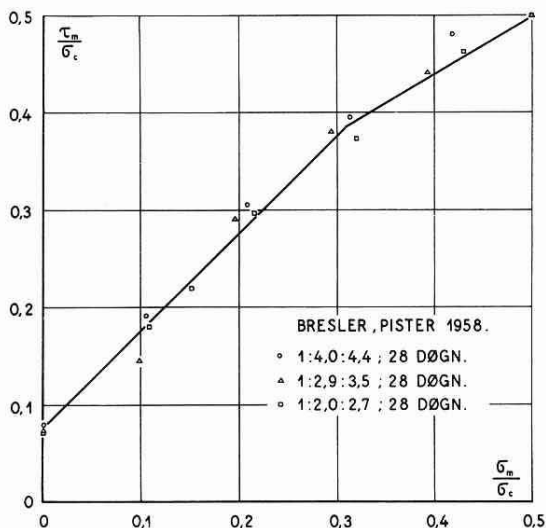


Fig. 10. Nyeste resultater for beton.
● Latest results from concrete.

De to liniers skæringspunkt findes til $(0,3; 0,38)$ eller udtrykt ved hovedspændingerne $\sigma_1 = 0,68 \sigma_c$; $\sigma_3 = -0,08 \sigma_c$.

Ved (A) i eks. 1 ses, at $\mu = 0,75$.

I fig. 10 er de nyeste forsøg [13] af denne art angivet, og man finder her en særdeles god overensstemmelse med de to rette linier.

Som tidligere nævnt er der ved de rørformede prøvelegemer, som anvendes ved disse forsøg en vis mulighed for mikrørevrer og vis svækkelse. Ved forsøgene [11], [12] i fig. 9 fandtes da også en 15–30 % lavere trykstyrke end for tilsvarende massive prøvelegemer. Ved forsøgene [13] i fig. 10 fandtes derimod ikke nogen væsentlig forskel, så denne forsøgsrække, der iøvrigt er mere omfattende, kan regnes for den bedste.

Det blev også ved denne undersøgt, om belastningsmåden havde nogen indflydelse, idet vridningsmomentet og trykkraften dels blev påført proportionalt, dels blev trykkraften holdt konstant, medens vridningsmomentet forøgedes til brud. Der kunne ikke konstateres nogen forskel.

SAMMENFATNING

For marmor og formentlig også for andre krystallinske stenarter har den mellemste hovedspænding en vis, men ikke særlig stor, indflydelse, som efter det foreliggende forsøgsmateriale kan tages i regning ved

formlerne (9) og (10). Relationen mellem τ_α og σ_α kan gengives ved en semikubisk parabel eller praktisk taget lige så godt ved en hyperbel.

For beton og cementmørtel er det med det foreliggende forsøgsmateriale ikke muligt med sikkerhed at afgøre om den mellemste hovedspænding har en væsentlig indflydelse på brud. Indtil videre må man derfor se bort fra denne og benytte MOHR'S hypotese. For et begrænset interval, der formentlig er tilstrækkeligt for praksis, kan man specielt anvende friktionshypotesen

$$\sigma_1 = \sigma_c + 4\sigma_3 \quad \sigma_3 \leq 2\sigma_c$$

og
$$-\sigma_3 = \text{trækstyrken}$$

der fandtes til 0,080 à 0,075 σ_c .

LITTERATURFORTEGNELSE

- [1] V. KÁRMÁN: *Festigkeitsversuche unter allseitigem Druck*. Mitt. ü. Forschungsarbeiten. Heft 118. Berlin 1912.
- [2] BÖKER: *Die Mechanik der bleibende Formänderung in kristallinisch aufgebauten Körpern*. Mitt. ü. Forschungsarbeiten. Heft 175-76. Berlin 1915.
- [3] ROS, EICHINGER: *Versuche zur Klärung der Frage der Bruchgefahr II*. E.M.P.A. Bericht 28. Zürich 1928. Se også Bericht 172. Zürich 1949.
- [4] RICHART, BRANDTZÆG, BROWN: *A Study of the Failure of Concrete under Combined Compressive Stresses*. Univ. of Ill. Eng. Exp. Stat. Bull. 185. 1928.
- [5] BRANDTZÆG: *Failure of a Material composed of non-isotropic Elements*. Det kgl. norske Videnskabers Selskabs Skrifter 2. Trondhjem 1927.
- [6] STRUCTURAL RESEARCH LABORATORY, DENVER, COLORADO. *Report SP-23*. 1949.
Se også: CHAMBAUD: *Resistance du Béton aux Contraintes triaxiales*. Ann. Inst. Bat. Travaux Public. Nr. 20. Février 1951.
- [7] CONCRETE LABORATORY, DENVER, COLORADO. *Report C-779*. 1954.
- [8] BRICE: *Determination expérimentale et tracé de la courbe de résistance intrinsèque du béton*. Science et Industrie (Constr. & Trav. Pub.). 1934.
- [9] BRICE: *Etude des conditions de formation des fissures de glissement et de décohesion dans les solides*. Travaux. Juin 1954.
- [10] SMITH, BROWN: *The Shearing Strength of Cement Mortar*. Univ. Wash. Eng. Exp. Stat. Bull. 106. 1941.
- [11] MCHENRY, KARNI: *Strength of Concrete under Combined Tensile and Compressive Stress*. Journal Am. Concrete Inst. April 1958.
- [12] BRESLER, PISTER: *Failure of Plain Concrete under Combined Stresses*. Proceedings of ASCE, V. 81. Separate No 674. April 1955.

- [13] BRESLER, PISTER: *Strength of Concrete under Combined Stresses*. Journal Am. Concrete Inst. September 1958.
- [14] WÄSTLUND: *Nya Rön angående Betongens grundläggande Hållfasthets-egenskaper*. Betong. Heft 3. 1937.
- [15] REINIUS: *En teori om betongens deformation och brott*. Betong. Heft 1. 1955.
- [16] RICHART, BRANDTZÆG, BROWN: *The Failure of Plain and Spirally Reinforced Concrete in Compression*. Univ. Ill. Eng. Exp. Stat. Bull. 190. 1929.
- [17] SCHLEICHER: *Der Spannungszustand an der Fließgrenze*. Z. angew. Math. Mech. Bd. 6. Heft 3. Juni 1926.
- [18] SANDEL: *Über die Festigkeitsbedingungen*. Leipzig 1925.

SUMMARY

This paper gives an outline of the strength theories and an evaluation of the existing experiments with marble, cement mortar, and concrete.

As for marble, and presumably other types of crystalline stone as well, the 2nd principal stress is of some, if not of a particularly essential, influence for which the material of experiments available may justify allowance to be made in formulae (9) and (10). The relation between τ_{α} and σ_{α} can be represented by a semi-cubic parabola or, for all practical purposes, by a hyperbola.

As for concrete and cement mortar the experimental material available is insufficient for a reliable evaluation of whether the 2nd principal stress is essentially influencing rupture. So far this stress must then be excluded to the advantage of Mohr's theory. Within a limited interval which may suffice for practical purposes the theory of internal friction may especially apply

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_c + 4\sigma_3 & \sigma_3 &\leq 2\sigma_c \\ \text{and} & & -\sigma_3 &= \text{the tensile strength,} \end{aligned}$$

which was found to be 0.080 to 0.075 σ_c .

(Modtaget 2. januar 1959).

Bidrag til diskussion af ovenstående artikel modtages af redaktøren indtil 30. april 1959. Publicerede bidrag vil være opført i den følgende årgangs indholdsfortegnelse.